DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM II

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1925
SKŁAD GŁÓWNY GEBETHNER I WOLFF
WARSZAWA — KRAKÓW — POZNAŃ — LUBLIN — ŁÓDŹ

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM II

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1925
SKŁAD GŁÓWNY GEBETHNER I WOLFF
WARSZAWA — KRAKÓW — POZNAŃ — LUBLIN — ŁÓDŹ

Uwaga. Pierwszy zeszyt czasopisma Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazał się w roku 1921 p. t. *Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego;* wobec tego zeszyt niniejszy stanowi drugi tom publikacji rzeczonego Towarzystwa.

Kraków — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem J. Filipowskiego.

Stefan Kempisty.

O funkcjach pochodnych ograniczonych.

§ 1. Określenia wstępne.

Wartością graniczną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę ciągu

$$f(x_1),\ f(x_2), \ldots, f(x_k), \ldots,$$

jeśli

$$\lim_{k=\infty} x_k = x_0,$$

przyczem ciąg $\{x_k\}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych.

Liczbą pochodną $\wedge F(x_0)$ funkcji $F(x)$ w puncie x_0 jest wartość graniczna stosunku

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

w punkcie x_0.

Z pośród liczb pochodnych wyróżniamy górną i dolną pochodną z prawej lub lewej strony t. zw. pochodne Diniego i pochodne *skrajne* to znaczy górną i dolną.

Funkcją miarową $\underset{x_0}{\overset{x}{-}}(E)$ nazywać będziemy miarę (w znaczeniu Lebesgue'a) wspólnej części przedziału (x_0, x) oraz zbioru E, jeśli $x_0 \leq x$, w przeciwnym razie przyjmiemy

$$\underset{x_0}{\overset{x}{-}}(E) = -\underset{x}{\overset{x_0}{-}}(E).$$

Jeśli $\varphi(x)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru E a więc równą jedności na tym zbiorze i zeru na jego dopełnieniu, wówczas

$$\underset{x_0}{\overset{x}{-}}(E) = \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi,$$

na mocy określenia całki Lebesgue'a.

Gęstością średnią zbioru E w przedziale (x_0, x) jest stosunek miary wspólnej części tego zbioru i przedziału (x_0, x) do długości przedziału, a więc gęstość średnia równa się stosunkowi

$$\frac{\overset{x}{\underset{x^0}{-}}(E)}{x - x_0},$$

Gęstością częściową zbioru E w punkcie x_0 nazywamy liczbę pochodną funkcji miarowej $\overset{x}{\underset{a}{-}}(E)$ czyli wartość graniczną gęstości średniej zbioru E w przedziale (x_0, x).

Gęstość częściową oznaczać będziemy przez $\delta_{x_0}(E)$.

Z pomiędzy gęstości częściowych wyróżniamy największą i najmniejszą t. zw. *górną* $d_{x_0}(E)$ i *dolną gęstość* $d_{x_0}(E)$.

Gęstością zbioru E w punkcie x_0 jest pochodna funkcji miarowej $\overset{x}{\underset{a}{-}}(E)$

§ 2 Funkcja o skończonej liczbie wartości.

Rozpoczniemy od rozważania liczby pochodnej Lebesgue'a w jednym pukcie. Gdy funkcja przyjmuje tylko skończoną ilość wartości, wówczas z określenia Lebesgue'a wynika bezpośrednio wyrażenie liczby pochodnej w zależności od gęstości częściowych.

Twierdzenie

Założenia: 1) $\varphi(x)$ przyjmuje w przedziale (a, b) jedynie, wartości $l_0, l_1, \dots l_n$,

2) zbiory punktów, w których funkcja przyjmuje te wartości są mierzalne, oznaczmy je odpowiednio przez $E_0, E_1, \dots E_n$.

3) $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi$,

4) $\bigwedge \Phi(x_0)$ jest liczbą pochodną całki $\Phi(x)$ w punkcie x_0.

Teza: Istnieje przejście do granicy, któremu odpowiada dana liczba pochodna $\bigwedge \Phi(x_0)$ oraz gęstości częściowe $\delta_{x_0}(E_i)$ związane równością

$$\bigwedge \Phi(x_0) = \sum_{2=0}^{n} l_i\, \delta_{x_0}(E_i).$$

D o w ó d. Jeśli $\varphi_i(x)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru E_i, wówczas

$$\varphi(x) = \sum_{2=0}^{n} l_i \varphi_i(x).$$

A zatem

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi) d(\xi) = \frac{1}{x - \alpha} \sum_{i=0}^{n} l_i \int_{x_0}^{x} \varphi_i(\xi) d(\xi)$$

czyli

(1) $$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \sum_{2=0}^{n} l_i \frac{\frac{x}{x_0}(E_i)}{x - x_0}.$$

Niech

(2) $$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$$

będzie przejściem do granicy odpowiadającym liczbie pochodnej $\wedge \Phi(x_0)$, przyczem $x_k \neq x_0$.

Ponieważ gęstość średnia wzoru E_0 w przedziałach (x_0, x_k) tworzą ciąg ograniczony (liczbami 0, 1), więc możemy wybrać z tego ciagu część zbieżną.

Oznaczmy przez

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, \ldots$$

odpowiednie wartości zmiennej niezależnej; tworzą one ciąg wybrany z ciągu (2).

Wówczas

$$\lim_{k=\infty} \frac{\frac{x_k^0}{x_0}(E_0)}{x_k^0 - x_0}$$

jest gęstością częściową odpowiadająca nowemu przejściu do granicy.

Postępując dalej w ten sposób, możemy wyznaczyć przejście do granicy dające oznaczone gęstości częściowe wszystkich zbiorów w punkcie x_0.

Istotnie, niech

(3) $$x_1^i, x_2^i, \ldots, x_k^i, \ldots$$

będzie ciągiem wybranym zbieżności wyrażeń

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0},\ \frac{\frac{x}{x_0}(E_0)}{x-x_0},\ \frac{\frac{x}{x_0}(E_1)}{x-x_0},\ldots,\ \frac{\frac{x}{x_0}(E_i)}{x-x_0},$$

przyczem

$$\lim_{k=\infty} x_k^i = x_0.$$

Z ciągu (3) możemy z kolei wybrać część

$$x_1^{i+1},\ x_2^{i+1},\ldots\ x_k^{i+1},\ldots$$

tak, aby gęstości średnie zbioru E_{i+1} w przedziałach (x_0, x_k^{i+1}) posiadały granicę, gdy k zmierza do nieskończoności.

Stosując wybór ten $n+1$ razy, możemy orzec, że istnieje przejście do granicy

(4) $$x_1^n,\ x_2^n,\ldots,\ x_k^n,$$

dające zarówno liczbę pochodną $\wedge F(x_0)$ jak i oznaczone gęstości częściowe wszystkich zbiorów E_i w punkcie x_0.

Oznaczmy przez $\delta_{x_0}(E_i)$ te równoczesne gęstości częściowe i opuśćmy dla skrócenia wskaźnik n przy wyrazach ciągu (4), co będzie równoważne założeniu, że ciąg (2) jest poszukiwanym przejściem do granicy.

Ponieważ na mocy równości (1) mamy

$$\frac{\Phi(x_k)-\Phi(x_0)}{x_k-x_0} = \sum_{i=0}^{n} l_i \frac{\frac{x_k}{x_0}(E_i)}{x_k-x_0},$$

więc, gdy k zmierza do nieskończoności, obie strony zmierzają do granic związanych równością

(5) $$\wedge\Phi(x_0) = \sum_{i=0}^{n} l_i\ \delta_{x_0}(E_i).$$

Wniosek 1. Jeśli wszystkie zbiory (E_i) $(i=0,\ldots n)$ posiadają dla pewnego przejścia do granicy równoczesne gęstości częściowe wówczas istnieje odpowiednia liczba pochodna i jest wyznaczona przez równość (5).

Wniosek 2. Jeśli każdy ze zbiorów E_i posiada jedyną gęstość w punkcie x_0, wówczas istnieje jedna tylko liczba pochodna w tym punkcie a więc funkcja $\Phi(x)$ jest różniczkowalną.

Odwrotne twierdzenie nie jest jednak słuszne, jak wskazuje następujący przykład funkcji, której całka posiada pochodną po-

mimo, że zbiory E_i nie posiadają oznaczonych gęstości w jednym z punktów.

Przykład. Niech $\varphi(x) = 0$, gdy

$$\frac{k-1}{4,5,\ldots k} < x < \frac{k}{4,5,\ldots k}$$

lub

$$\frac{2}{4,5\ldots k} + \frac{3p-1}{4,5\ldots k(k+1} < x < \frac{2}{4,5\ldots k} + \frac{3p}{4,5\ldots k(k+1)},$$

gdzie k i p przybierają wartości całkowite, przyczem $k \geqslant p$

$$1 \leq p \leq \frac{(k-3)(k+1)}{3}.$$

Przyjmijmy $\varphi(x) = 1$ w punktach zbioru określonego nierównościami

$$\frac{2}{4,5\ldots k} + \frac{3(p-1)}{4,5\ldots k(k+1)} < x < \frac{2}{4,5\ldots k} + \frac{3(p-1)+\frac{3}{2}}{4,5\ldots k(k+1)}.$$

Wreszcie niech $\varphi(x) = \frac{3}{5}$ w pozostałych punktach przedziału zamkniętego $(0, 1)$.

Oznaczmy przez E_1, E_2, E_3 zbiory punktów, w których funkcja przyjmuje wartości $0, 1$ oraz $\frac{3}{5}$.

Weźmy kolejno pod uwagę różne możliwe przejścia do granicy w punkcie zerowym.

Gdy

$$x_k = \frac{k}{4,5\ldots k},$$

wówczas otrzymujemy następujące gęstości częściowe w punkcie zerowym:

$$\delta_0(E_1) = \tfrac{1}{3}, \quad \delta_0(E_2) = \tfrac{1}{2}, \quad \delta_0(E_3) = \tfrac{1}{6}.$$

A więc na mocy wniosku 1

$$\bigwedge \Phi(0) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{5}.$$

Takież wartości otrzymujemy przy

$$\frac{k-1}{4,5\ldots k} \leqslant x_k < \frac{k}{4,5\ldots k},$$

gdyż stosunek przedziału $\left(\frac{k-1}{4,5\ldots k}, \frac{k}{4,5\ldots k}\right)$ do $(0, x_k)$ zmierza do zera, gdy k wzrasta nieograniczenie.

Podobnież, jeśli

$$\frac{2}{4,5\ldots k} < x_n < \frac{k-1}{4,5\ldots k},$$

oraz

$$\lim_{k=\infty} \frac{x_k - \frac{2}{4,5\ldots k}}{x_k} \neq 0,$$

odpowiednia liczba pochodna równa się $\frac{3}{8}$, gdyż gęstości średnie zbiorów E_1 i E_2 w przedziale $\left(\frac{2}{4,5\ldots k}, \frac{k-1}{4,5\ldots k}\right)$ zmierzają do granic $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$ przy k rosnącym nieograniczenie.

Jeśli

$$\lim_{k=\infty} \frac{x_k - \frac{2}{4,5\ldots k}}{x_k} = 0,$$

otrzymujemy te same gęstości częściowe, co przy

$$x_k = \frac{2}{4,5\ldots k},$$

a mianowicie

$$\delta_0(E_1) = \tfrac{1}{6}, \quad \delta_0(E_2) = \tfrac{1}{4}; \quad \delta_0(E_3) = \tfrac{7}{12}$$

ponieważ E_1 i E_2 nie posiadają punktów w jednej połowie przedziału $(0, x_k)$ zaś w drugiej połowie gęstości średnie zmierzają do $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$.

Obliczając odpowiednią liczbę pochodną ze wzoru (5), otrzymujemy znowu $\frac{3}{8}$.

Wreszcie dla

$$\frac{1}{4,5\ldots k} < x_k < \frac{2}{4,5\ldots k},$$

gdy

$$t = \lim \frac{\frac{2}{4,5\ldots k} - x_k}{\frac{2}{4,5\ldots k}} \neq 0.$$

mamy gęstości częściowe:

$$\delta_0(E_1) = \tfrac{1}{6}\frac{1}{1-t}, \quad \delta_0(E_2) = \tfrac{1}{4}\frac{1}{1-t}, \quad \delta_0(E_3) = \frac{\frac{7}{12}-t}{1-t}$$

a więc

$$\bigwedge \Phi(0) = \tfrac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \tfrac{3}{5}\frac{\frac{7}{12}-t}{1-t} = \tfrac{3}{5}.$$

Jeśli zaś $t = 0$, gęstości częściowe są te same, co przy $x_k = \dfrac{2}{4, 5 \ldots k}$.

Największą wartością t jest $\frac{1}{2}$ i wówczas otrzymujemy znowu te same gęstości, co przy

$$x_k = \frac{1}{4, 5 \ldots k}.$$

Uwzględniliśmy zatem wszystkie możliwe przejścia do granicy. Ponieważ stale $\bigwedge \Phi(0) = \frac{3}{5}$ więc $\Phi(x)$ jest różniczkowalną w punkcie zerowym, natomiast żaden ze zbiorów E_1, E_2 i E_3 nie posiada gęstości w tym punkcie.

§ 3. Aproksymacja liczby pochodnej.

Korzystając z funkcji o skończonej liczbie wartości a różniącej się od danej funkcji ograniczonej $f(x)$ conajwyżej o ε, możemy wyznaczyć wartość przybliżoną liczby pochodnej całki

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi.$$

Twierdzenie I.

Założenia. 1^0 $f(x)$ jest funkcją ograniczoną w przedziale (a, b) a więc

$$A \leq f(x) \leq B,$$

2^0 $f(x)$ jest funkcją mierzalną a zatem całkowalną w znaczeniu Lebesgue'a, przyczem

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi;$$

niech $\bigwedge F(x_0)$ będzie jedną z liczb pochodnych tej całki w punkcie x_0,

3^0 Niech

$$l_0, l_1, \ldots, l_n$$

będą liczbami przedziału (A, B) przyczem

$$l_0 = A, \quad l_n = B$$

zaś

$$l_{i+1} - l_i \leq \varepsilon \quad (i = 0, \dots n).$$

4° Niech E_i będzie zbiorem punktów x, w których

$$l_i \leq f(x) < l_{i+1}.$$

Teza. Istnieje przejście do granicy, któremu odpowiada w punkcie x_0 przedziału (a, b) zarówno dana liczba pochodna $\wedge F(x_0)$ jak i równoczesne gęstości częściowe $\delta_{x_0}(E_i)$, spełniające warunek

$$0 \leq \wedge F(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \, \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon.$$

Dowód. Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją, przyjmującą skończoną ilość wartości

$$l_0, l_1, \dots, l_n$$

odpowiednio w punktach zbiorów

$$E_0, E_1, \dots, E_n.$$

Wówczas, na mocy założeń 3 i 4, zachodzi nierówność

$$0 \leq f(x) - \varphi(x) < \varepsilon.$$

Z ciągu odpowiadającego liczbie pochodnej $\wedge F(x_0)$ wybieramy ciąg odpowiadający liczbie pochodnej $\wedge \Phi(x_0)$, przyjmując

(1) $$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(\xi) \, d\xi.$$

Wybór taki jest możliwy, ponieważ

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi) \, d\xi$$

zaś

$$A \leq \varphi(x) \leq B$$

a więc wszelki ciąg względnych przyrostów funkcji $\Phi(x)$ jest ograniczony przez liczby A i B.

Z otrzymanego przejścia do granicy możemy, jak widzieliśmy w § 2, wybrać ciąg

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots,$$

któremu odpowiadają gęstości częściowe $\delta_{x_0}(E_i)$, spełniające równość

(2) $$\wedge \Phi(x_0) = \sum_{2=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i).$$

Lecz z nierówności (1) wynika, że

$$0 \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi < \varepsilon$$

czyli

$$0 \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon$$

W szczególności

$$0 \leq \frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0} - \frac{\Phi(x_k) - \Phi(x_0)}{x_k - x_0} < \varepsilon,$$

zatem, przechodząc do granicy, otrzymamy

$$0 \leq \wedge F(x_0) - \wedge \Phi(x_0) < \varepsilon.$$

A więc, na mocy równości (2),

$$0 \leq \wedge F(x_0) - \sum_{2=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon.$$

Twierdzenie 2. Jeśli $f(x)$ jest funkcją mierzalną i ograniczoną w przedziale (a, b) zaś wszelki zbiór, określony nierównością

$$a < f(x) < \beta,$$

posiada gęstość w pewnym punkcie tego przedziału przy wszelkich wartościach α i β, wówczas całka

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

posiada pochodną w tym punkcie.

D o w ó d. Zgodnie z założeniem każdy ze zbiorów E_i określonych wyżej posiada gęstość $d_{x_0}(E_i)$ w punkcie x_0 przedziału (a, b). Jeśliby zatem w tym punkcie istniały dwie różne liczby pochodne całki $F(x)$ np. $\wedge F(x_0)$ i $\lambda F(x_0)$, mielibyśmy dwie nierówności następujące

$$0 \leq \Lambda F(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \, d_{x_0}(E_i) < \varepsilon$$

$$0 \leq \lambda F(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \, d_{x_0}(E_i) < \varepsilon$$

skąd

$$-\varepsilon < \Lambda F(x_0) - \lambda F(x_0) < \varepsilon,$$

przy wszelkich dodatnich wartościach ε.

Otóż może to zachodzić tylko wtedy, gdy

$$\Lambda F(x_0) = \lambda F(x_0).$$

A więc wszystkie liczby pochodne całki $F(x)$ w punkcie x_0 są równe czyli $F(x)$ posiada pochodną w tym punkcie.

Sumy $\sum_{i=0}^{n} l_i \, d_{x_0}(E_i)$ są wartościami przybliżonemi tej pochodnej.

Ponieważ, jak widzieliśmy, istnieją funkcje równe pochodnej owej całki w pewnym punkcie pomimo, że zbiór

$$E[\alpha < f(x) < \beta]$$

nie posiada oznaczonej gęstości więc, naogół biorąc, wartością przybliżoną będzie suma

$$\sum_{i=0}^{n} l_i \, \delta_{x_0}(E_i)$$

zawierająca równoczesne gęstości częściowe $\delta_{x_0}(E_i)$.

Nawet jeśli $f(x)$ jest pochodną w przedziale (a, b), zbiór E może nie posiadać gęstości w pewnym punkcie tego przedziału, jak to widać z następującego przykładu.

Przykład. Funkcję $\varphi(x)$, podaną jako przykład w § 2, można przekształcić, w ten sposób, aby stała się ciągłą w każdym punkcie przedziału $(0, 1)$ prócz punktu zerowego.

Istotnie zbiory E_1 i E_2, w których $\varphi(x)$ przyjmuje wartości 0 i 1, składające się z przedziałów otwartych zaś zbiór E_3 w którym

$$\varphi(x) = \tfrac{3}{5}$$

utworzony jest z przedziałów zamkniętych i punktów odosobnionych. Pomiędzy $\frac{1}{4, 5 \ldots k(k+1)}$ a $\frac{1}{4, 5 \ldots k}$ znajduje się skończona ilość tych przedziałów oraz punktów. Możemy zatem skracając

każdy przedział zbiorów E_1, E_2 i E_3 z obu stron o $\frac{1}{k}$ długości uzupełnić funkcję w usuniętych częściach linjowo z zachowaniem ciągłości w przedziale zamkniętym $\left(\frac{1}{4,5\ldots k(k+1)}, \frac{1}{4,5\ldots k}\right)$.

W ten sposób zbudowana funkcja $f(x)$ będzie ciągła przy

$$0 < x \leq 1.$$

Gęstość średnia w przedziale $(0, x_k)$ zbioru

$$E_\varepsilon = E[0 \leq f(x) < \varepsilon]$$

będzie się różnić od gęstości zbioru E_1 w tym przedziale conajwyżej o część $\frac{\varepsilon}{k}$ tej ostatniej a więc przy k rosnącym nieograniczenie otrzymamy jako granicę taką samą gęstość częściową, jak i dla zbioru E_1. Ponieważ zbiór E_1 posiada różne gęstości częściowe, więc zbiór E_ε również nie będzie posiadał jednej gęstości w punkcie zerowym.

Istnienie tego rodzaju funkcji pozwala tylko na ogólny wniosek następujący.

Wniosek. Jeśli funkcja ograniczona w przedziale (a, b) jest pochodną, wówczas istnieją równoczesne gęstości częściowe zbiorów

$$E_i = E[l_i \leq f(x) < l_{i+1}],$$

spełniające nierówności

$$0 \leq f(x) - \sum_{2=0}^{n} l_i\, \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon,$$

o ile

$$l_{i+1} - l_i \leq \varepsilon.$$

§ 4. Istotne wartości graniczne.

Na wielkość sum będących przybliżeniami liczby pochodnej $\wedge F(x_0)$ wpływa rozłożenie gęstości zbiorów

$$E[\alpha < f(x) < \beta]$$

w punkcie x_0. Wpływ ten ujmiemy przy pomocy pojęcia istotnej wartości granicznej.

Określenie 1. *Istotną (aproksymatywną) wartością graniczną* funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywać będziemy każdą liczbę β tego rodzaju, że górna gęstość zbioru liczb x, spełniających nierówność

$$|f(x) - \beta| < \varepsilon,$$

jest dodatnią w punkcie x_0, przy wszelkich wartościach dodatnich ε.

Wniosek 1. Jeśli β nie jest istotną wartością graniczną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, wówczas istnieje takie ε, że zbiór określony nierównością

$$|f(x) - \beta| < \varepsilon$$

posiada gęstość równą zeru.

Twierdzenie 1. Zbiór istotnych wartości granicznych w punkcie x_0 przedziału (a, b) funkcji ograniczonych w tym przedziale jest ograniczony i domknięty.

D o w ó d. Z określenia wyżej podanego wynika, że istotna wartość graniczna jest przedewszystkiem wartością graniczną, w każdym bowiem przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ istnieć musi nieskończenie wiele liczb zbioru, w którym

$$|f(x) - \beta| < \varepsilon.$$

Ponieważ zbiór wszystkich wartości granicznych funkcji w punkcie jest ograniczony, więc również będzie ograniczoną jego część złożona z istotnych wartości granicznych.

Aby dowieść, że zbiór istotnych wartości granicznych w punkcie x_0 jest domknięty, weźmiemy pod uwagę jego punkt skupienia β'.

Pomiędzy liczbami naszego zbioru znajduje się zawsze liczba β spełniająca warunek

$$0 < |\beta - \beta'| < \varepsilon.$$

Jeśli zatem w pewnym punkcie x mamy

$$|f(x) - \beta| < \varepsilon, \tag{1}$$

wówczas zachodzi również nierówność

$$|f(x) - \beta'| < 2\varepsilon. \tag{2}$$

A więc zbiór, określony warunkiem (1), jest zawarty w zbiorze odpowiadającym nierówności (2).

Otóż górna gęstość pierwszego z tych zbiorów jest dodatnią

na mocy określenia istotnej wartości granicznej. Tem bardziej więc dodatnią będzie górna gęstość drugiego zbioru.

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc punkt skupienia β' należy do rozpatrywanego zbioru istotnych wartości granicznych.

Wniosek 2. Istnieje największa i najmniejsza istotna wartość graniczna funkcji w danym punkcie x_0, oznaczmy je odpowiednio przez $L(x_0)$ i $l(x_0)$.

Jeżeli A i B są liczbami ograniczającemi funkcją w przedziale (a, b), wówczas

$$A \leq l(x_0) \leq L(x_0) \leq B.$$

Twierdzenie 2. Największa gęstość w punkcie x_0

$$E[f(x) \geqslant L(x_0) + \varepsilon]$$

równa jest zeru, gdy $\varepsilon > 0$.

Dowód. Jeśli

$$L(x_0) + \varepsilon \geqslant B,$$

twierdzenie jest oczywiste, gdyż wtedy zbiór E będzie pusty. Załóżmy więc

$$L(x_0) + \varepsilon < B.$$

Ponieważ liczby β przedziału $(L + \varepsilon, B)$ nie są istotnemi wartościami granicznemi, więc każdej z nich, odpowiada liczba dodatnia ε_β tego rodzaju, że zbiór punktów, w których

$$| f(x) - \beta | < \varepsilon_\beta,$$

posiada gęstość równą zeru w punkcie x_0 (wniosek 1).

Z nieskończonego zbioru przedziałów otwartych

$$(\beta - \varepsilon_\beta, \ \beta + \varepsilon_\beta)$$

można na mocy twierdzenia Borela, wybrać część skończoną

$$(\beta_1 - \varepsilon_1, \ \beta_1 + \varepsilon_1), \dots \ (\beta_n - \varepsilon_n, \ \beta_n + \varepsilon_n),$$

pokrywającą w zupełności przedział $(L + \varepsilon, B)$.

Zbiór

$$E[f(x) \geqslant L(x_0) + \varepsilon]$$

jest zatem sumą zbiorów

$$E_i = [\ f(x) - \beta_i < \varepsilon_i] \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

a więc podobnie, jak i zbiory E_i, posiada gęstość równą zeru w punkcie x_0.

Wniosek 3. Zbiór punktów

$$E[f(x) \leqslant l(x_0) - \varepsilon]$$

posiada gęstość równą zeru w punkcie x_0, o ile $\varepsilon < 0$.

Twierdzénie 3. Zbiór E określony nierównością

$$l(x) - \varepsilon < f(x) < L(\alpha) + \varepsilon$$

posiada gęstość równą jedności, jakąkolwiek byłaby liczba dodatnia ε.

Dowód. Weźmy pod uwagę prócz zbioru E dwa zbiory

$$E' = E[f(x) \leqslant l - \varepsilon],$$
$$E'' = E[f(x) \geqslant L + \varepsilon].$$

Gęstości tych zbiorów są równe zeru na mocy twierdzenia 2 i wniosku 3.

Otóż

$$\frac{\overset{x}{\underset{x_0}{-}}(E) + \overset{x}{\underset{x_0}{-}}(E') + \overset{x}{\underset{x_0}{-}}(E'')}{x - x_0} = 1,$$

zatem, przechodząc do granicy dowolnym sposobem, otrzymujemy

$$d_{x_0}(E) = 1.$$

Wniosek 4. Gdy

$$L(x_0) = l(x_0),$$

t. j. gdy istnieje jedna tylko istotna wartość graniczna w punkcie x_0, wówczas zbiór, określony warunkiem

$$| f(x) - l(x_0) | < \varepsilon,$$

posiada gęstość równą jedności w tym punkcie i to przy wszelkiej, byle dodatniej, wartości ε.

Określenie 2 (Denjoy). Funkcję $f(x)$ nazywamy *aproksymatywnie ciągłą* w punkcie x_0, jeśli zbiór, określony nierównością

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon,$$

posiada w tym punkcie gęstość równą jedności niezależnie od ε.

Wniosek 5. Funkcja aproksymatywna ciągła w punkcie x_0 jest funkcją, której wartość jest jedyną istotną wartością graniczną w tym punkcie t. j.

$$f(x_0) = L(x_0) = l(x_0).$$

Określenie 3. Funkcję $f(x)$ nazywać będziemy aproksymatywnie nawpółciągłą z góry w punkcie x_0, jeśli zbiór określony nierównością

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

posiada gęstość równą jedności w tym punkcie, o ile $\varepsilon > 0$.

Podobnie określamy funkcję aproksymatywnie nawpółciągłą z dołu.

Twierdzenie 4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja $f(x)$ była aproksymatywnie nawpółciągłą z góry w punkcie x_0, jest nierówność

$$f(x_0) \geqslant L(x_0).$$

Dowód. *Warunek jest konieczny.* Gdyby było

$$f(x_0) < L(x_0),$$

wówczas moglibyśmy tak dobrać ε, aby zachodziła nierówność

$$f(x_0) + \varepsilon < L(x_0) - \varepsilon.$$

Otóż gęstość zbioru

$$E[f(x) \geqslant f(x_0) + \varepsilon]$$

w punkcie x_0 równa jest zeru, gdyż $f(x)$ jest aproksymatywnie ciągłą w tym punkcie.

Zatem część tego zbioru złożona z punktów, w których

$$L(x_0) - \varepsilon < f(x) < L(x_0) + \varepsilon.$$

miałaby również gęstość zero pomimo, że $L(x_0)$ jest istotną wartością graniczną.

Warunek jest dostateczny. Załóżmy

$$L(x_0) \leqslant f(x_0),$$

wówczas

(3) $$L(x_0) + \varepsilon \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Zbiór

$$E[f(x) < L(x_0) + \varepsilon]$$

ma gęstość równą jedności, gdyż jego dopełnienia

$$E[f(x) \geqslant L(x_0) + \varepsilon)$$

ma gęstość zero, na mocy twierdzenia 2.

Lecz, wobec nierówności (3). zbiór

$$E[f(x) < L(x_0) + \varepsilon]$$

jest częścią zbioru

$$E[f(x) < f(x_0) + \varepsilon]$$

a więc ten ostatni posiada również gęstość równą jedności w punkcie x_0 czyli $f(x)$ jest funkcją aproksymatywnie nawpółciągłą z góry w tym punkcie.

§ 5. Funkcje pochodne ograniczone a istotne wartości graniczne.

W sumach $\sum_{2=0}^{n} l_i \delta_i(E_i)$ znikają składniki odpowiadające przedziałowi

$$l_i \leqq y < l_{i+1}$$

nie zawierającym istotnych wartości granicznych.

Możemy, korzystając z tego, zacieśnić zakres nieoznaczoności pochodnej całki $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$.

Twierdzenie 1. Jeśli funkcja $f(x)$ jest mierzalną ograniczoną, w przedziale (a, b), wówczas w punkcie x_0 należącym do tego przedziału mamy zależność

$$l(x_0) \leqq \wedge F(x_0) \leqq L(x_0)$$

a więc liczba pochodna całki nie wykracza poza skrajne istotne wartości graniczne.

Dowód. Wystarczy uzasadnić drugą z nierówności. gdyż $-l(x_0)$ jest największą istotną wartością graniczną funkcji $-f(x)$ w punkcie x_0.

Załóżmy więc, że

$$\wedge F(x_0) > L(x_0).$$

Biorąc

$$\varepsilon < \frac{\wedge F(x_0) - L(x_0)}{2},$$

otrzymamy nierówność

$$\wedge F(x_0) - \varepsilon > L(x_0) + \varepsilon.$$

Zatem zbiór

$$E[f(x) > \wedge F(x_0) - \varepsilon]$$

stanowi część zbioru

$$E[f(x) > L(x_0) + \varepsilon].$$

Ponieważ ten ostatni ma gęstość równą zeru w punkcie x_0, więc tem bardziej zbiór pierwszy.

Otóż, gdy

$$l_i > \wedge F(x_0) - \varepsilon,$$

zbiór

$$E_i = E[l_i \leqslant f(x) < l_{i+1}]$$

jest częścią zbioru

$$E[f(x) > \wedge F(x_0) - \varepsilon]$$

a więc tembardziej

$$d_{x_0}(E_i) = 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1 z § 3, możemy znaleźć przejście do granicy takie, że

$$(1) \qquad 0 \leqslant \wedge F(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon,$$

o ile $l_{i+1} - l_i \leqslant \varepsilon$.

Ponieważ gęstości częściowe $\delta_{x_0}(E_i)$ mogą być różne od zera tylko wtedy, gdy

$$l_i \leqq \wedge F(x_0) - \varepsilon,$$

więc

$$\sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i) \leqq [\wedge F(x_0) - \varepsilon] \sum_{i=0}^{n} \delta\ (E_i).$$

Otóż

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_{x_0}(E_i) = 1,$$

zatem

$$\wedge F(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i) \geqslant \varepsilon$$

wbrew nierówności (1).

Wniosek 1. Jeśli $f(x)$ jest funkcją pochodną, ograniczoną w przedziale (a, b), wówczas mamy

$$l(x) \leq f(x) \leq L(x).$$

Gdy w szczególności

$$L(x) = l(x),$$

wówczas

$$f(x) = L(x) = l(x)$$

czyli $f(x)$ jest aproksymatycznie ciągłą na mocy wniosku 5 z § 4.

Wniosek 2. Jeśli funkcja pochodna posiada w każdym punkcie przedziału (a, b) jedną tylko istotną wartość graniczną, wówczas jest aproksymatywnie ciągłą w tym przedziale.

Twierdzenie 2 (Denjoy).

Funkcja mierzalna i ograniczona w przedziale (a, b) jest równą pochodnej swej całki w każdym punkcie, w którym jest aproksymatywnie ciągłą[1]).

Dowód. Wyznaczmy przejście do granicy odpowiadające pewnej liczbie pochodnej $\wedge F'(x_0)$ i gęstościom częściowym, wchodzącym do nierówności

(1)
$$0 \leq \wedge F(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon.$$

Z określenia funkcji aproksymatywnie ciągłej w punkcie x_0 wynika, że

$$\delta_{x_0}(E_i) = 0,$$

o ile

$$l_i \geqq f(x_0) + \varepsilon$$

lub

$$l_i < f(x_0) - \varepsilon.$$

Dla pozostałych wskaźników i mamy

$$f(x_0) - \varepsilon \leq l_i < f(x_0) + \varepsilon,$$

zatem

$$[f(x_0) - \varepsilon] \sum_{i=0}^{n} \delta_{x_0}(E_i) \leq \sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i) < [f(x_0) + \varepsilon] \sum_{i=0}^{n} \delta_{x_0}(E_i).$$

---

[1]) A. Denjoy: Sur les fonctions derivées sommables. Bull. Soc. Math. de France, 1913, p. 172.

Ponieważ zaś

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_{x_0}(E_i) = 1,$$

więc

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \sum l_i \delta_{x_0}(E_i) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Zestawiając ostatnią nierówność z nierównością (1), widzimy, że

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \wedge F(x_0) < f(x_0) + 2\varepsilon,$$

jakąkolwiek, byle dodatnią, byłaby liczba ε.

Zatem

$$\wedge F(x_0) = f(x_0).$$

Otóż $\wedge F(x_0)$ jest dowolnie wziętą liczbą pochodną a więc wszystkie liczby pochodne całki $F(x_0)$ w punkcie x_0 są sobie równe czyli funkcja ta jest różniczkowalną i

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ostatnią równość możnaby wyprowadzić wprost z tw. 1 wobec równości $f(x_0) = l(x_0) = L(x_0)$.

Twierdzenie 3.

Założenia. 1⁰ $f(x)$ jest funkcją ograniczoną w przedziale (a, b),

2⁰ gdy x_0 jest punktem przedziału (a, b),

$$f(x_0) = F'(x_0),$$

3⁰

$$f(x_0) = L(x_0).$$

Teza. $f(x)$ jest aproksymatywnie ciągłą w punkcie x_0, t. j. $L(x_0)$ jest jedyną istotną wartością graniczną w tym punkcie.

Dowód. Ponieważ $f(x_0)$ jest największą istotną wartością graniczną, więc w sumie

$$S(x_0) = \sum_{i=2}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i),$$

spełniający warunek (1), wszystkie składniki odpowiadające liczbom

$$l_i > f(x_0)$$

znikną, gdyż wtedy

$$\delta_{x_0}(E_i) = 0.$$

Możemy więc założyć, że

$$l_n = f(x_0).$$

Utwórzmy funkcję $\varphi(x)$ w sposób następujący:

$$\varphi(x) = f(x_0), \text{ gdy } f(x_0) - \mu \leq f(x) \leq f(x_0),$$
$$f(x_0) = f(x) \text{ w pozostałych punktach przedziału } (a, b).$$

Niech G_i będzie zbiorem punktów, w których

$$l_i \leq \varphi(x) < l_{i+1},$$

zaś $f(x_0) - \mu$ jedną z liczb l_i np.

$$f(x_0) - \mu = l_k.$$

Wówczas

$$G_i = E_i, \text{ przy } i < k,$$
$$G_i = 0, \text{ gdy } k \leq i < n.$$
$$G_n = E_k + E_{k+1} + \ldots + E_n.$$

Temu samemu przejściu do granicy, która daje sumę $S(x_0)$ a więc gęstości częściowe zbiorów E_i, odpowiadają oznaczone gęstości częściowe zbiorów G_i, nadto

(2) $$\sigma(x_0) = \sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(G_i) = \sum_{i=0}^{k-1} l_i \delta_{x_0}(E_i) + f(x_0)\delta_{x_0}(G_n).$$

Otóż zbiór G_n składa się z tych samych punktów, co i zbiór określony nierównością

$$|f(x) - f(x_0)| < \mu;$$

gdy tylko

$$l_{i+1} - l_i \leq \mu.$$

Przekonamy się, że zbiór E posiada w punkcie x_0 gęstość równą jedności.

Załóżmy

(3) $$\delta_{x_0}(E) < 1.$$

Ponieważ $E = G_n$, więc

(4) $$\sum_{i=0}^{n} \delta_{x_0}(E_i) + \delta_{x_0}(E) = 1.$$

Niech

$$\eta = \sum_{i=0}^{n} \delta_{x_0}(E_i),$$

będzie to liczba dodatnia na mocy warunków (3) i (4).

Otóż

$$l_i < f(x_0) - \mu,$$

gdy $i < k$, więc

$$\sigma(x_0) < [f(x_0) - \mu]\,\eta + f(x_0)\,(1 - \eta)$$

czyli

(5) $$\sigma(x_0) < f(x_0) - \mu\eta,$$

jakikolwiek byłby układ liczb l_i, byleby zachodziła nierówność

$$l_{i+1} - l_i \leq \mu.$$

Będzie to spełnione, jeśli założymy

(6) $$\varepsilon < \mu\eta,$$

gdyż

$$\mu\eta < \mu.$$

Z równości (2) wynika, że

$$\sigma(\alpha_0) - S(x_0) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_0) - l_i]\, \delta_{x_0}(E_i),$$

gdyż

$$\delta_{x_0}(G_n) = \delta_{x_0}(E_k) + \delta_{x_0}(E_{k+1}) + \dots + d_{x_0}(E_n),$$

na mocy określenia funkcji $\varphi(x)$ i zbiorów G_i.

Otóż

$$l_i \leq f(x_0),$$

więc mamy

(7) $$\sigma(x_0) - s(x_0) \geqslant 0, \text{ czyli } s(x_0) \leq \sigma(x_0).$$

Suma $s(x_0)$ spełnia nierówność (1)

$$0 \leq f(x_0) - s(x_0) < \varepsilon,$$

zatem

(8) $$f(x_0) < \sigma(x_0) + \varepsilon,$$

Nierówności (7) i (8) dają

(9) $$f(x_0) < \sigma(x_0) + \varepsilon,$$

co stoi w sprzeczności z wyprowadzoną zależnością (5). Istotnie zestawiając obie nierówności (5) i (9) otrzymujemy

$$f(x_0) < f(x_0) - \mu\eta + \varepsilon$$

czyli

$$\mu\eta < \varepsilon,$$

wbrew założeniu (6).

Dowiedliśmy zatem, że

$$\delta_{x_0}(E) = 1.$$

Otóż przejście do granicy dające tą gęstość częściową jest ciągiem wybranym z ciągu o granicy x_0 odpowiadającego liczbie pochodnej $\bigwedge F(x_0)$. Ponieważ założyliśmy, że funkcja $F(x_0)$ jest różniczkowalną w punkcie x_0, więc możemy wybierać z dowolnego ciągu zmierzającego do x_0.

Weźmy pod uwagę dolną gęstość zbioru E w punkcie x_0, którą oznaczymy przez

$$\underline{d}_{x_0}(E).$$

Odpowiada jej pewne przejście do granicy

$$x_1, x_2 \ldots, x_n, \ldots$$

Z tego właśnie ciągu wybierzmy część, dla której

$$\delta_{x_0}(E) = 1.$$

Ponieważ wtedy

$$\delta_{x_0}(E) = \underline{d}_{x_0}(E),$$

więc

$$\underline{d}_{x_0}(E) = 1.$$

Z drugiej znów strony

$$\underline{d}_{x_0}(E) \leq \overline{d}_{x_0}(E)$$

a więc

$$\underline{d}_{x_0}(E) = \overline{d}_{x_0}(E) = 1$$

czyli zbiór E posiada w punkcie x_0 jedną gęstość równą jedności.

Ponieważ liczba dodatnia μ, występująca w nierówności

$$|f(x) - f(x_0)| < \mu,$$

określającej zbiór E jest dowolną, więc funkcja $f(x)$ jest aproksymatywnie ciągłą w punkcie x_0.

Wniosek 3. Jeśli, przy tych samych pozostałych założeniach

$$f(x_0) = l(x_0),$$

liczba $l(x_0)$ jest jedyną istotną wartością graniczną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

Zastosujmy do otrzymanych twierdzeń wyniki rozważań § 4 i 5. Jeśli funkcja ograniczona jest równocześnie pochodną i apro-

ksymatywnie nawpółciągłą z góry, wówczas, na mocy wniosku 1 z § 5

$$f(x_0) \leq L(x_0)$$

zaś na mocy twierdzenia 4 z § 4,

$$f(x_0) \geqslant L(x_0)$$

a zatem

$$f(x_0) = L(x_0).$$

Wniosek 4. Funkcja pochodna ograniczona i aproksymatywnie nawpółciągła z góry (z dołu) w przedziale (a, b) jest aproksymatywnie ciągłą w tym przedziale.

Otóż funkcje nawpółciągłe wprowadzone przez Baire'a są oczywiście aproksymatywnie nawpółciągłemi.

Wniosek 5. Funkcja pochodna nawpółciągła i ograniczona w przedziale (a, b) jest aproksymatywnie ciągłą w tym przedziale.

Ponieważ na mocy twierdzenia Denjoy funkcja ograniczona i aproksymatywnie ciągła jest pochodną, więc aproksymatywna ciągłość stanowi warunek konieczny i wystarczający, aby funkcja nawpółciągła ograniczona była pochodną.

Korzystając z ostatniego wniosku, możemy podać przykład funkcji, która, podobnie jak funkcje pochodne, jest klasy pierwszej Baire'a oraz przyjmuje w każdym przedziale wszelką wartość pośrednią między wartościami na krańcach przedziału (ciągłość według Darboux) a jednak nie jest pochodną

Przykład. Niech

$$f(x) = 1, \quad \text{gdy} \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{3^n} < x < \frac{2}{3^n},$$

$$f(x) = 0, \quad \text{gdy} \quad x = \frac{5}{2}\frac{1}{3^n}.$$

Aby otrzymać funkcję ciągłą, przy $x \neq 0$, przynajmniej, że $f(x)$ zmienia się linjowo w przedziałach zamkniętych

$$\left(\frac{2}{3^n}, \frac{5}{2}\frac{1}{3^n}\right), \quad \left(\frac{5}{2}\frac{1}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right).$$

Funkcja $f(x)$, określona w przedziale (0,1). jest oczywiście nawpółciągłą górnie w punkcie zero a więc jest granicą nierosnącego ciągu funkcji ciągłych [1]).

---

[1]) W. H. Young. The fundamental theorems of the differential calculus, Cambridge 1910 p. 7.

Pozatem przyjmuje ona nieskończenie wiele razy w przedziale $(0, x)$ każdą wartość pośrednią między zerem a jednością, w każdym zaś innym przedziale jest ciągłą a więc posiada i drugą własność funkcji pochodnych. Nie jest to jednak funkcja aproksymatywnie ciągła w punkcie zerowym.

Istotnie gęstość średnia zbioru E, określonego nierównością

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

równa się w przedziale $\left(0, \frac{2+\varepsilon}{3^n}\right)$ liczbie

$$\frac{3}{2} \frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon};$$

gdy $\varepsilon < 1$, otrzymujemy

$$\delta_0(E) < 1.$$

Nie będąc funkcją aproksymatywnie ciągła, $f(x)$ nie może być pochodną, na mocy wniosku 5.

§ 6. Funkcje pochodne skrajne.

Otrzymane wyniki mogą być rozszerzone na liczby pochodne, zasadnicze bowiem twierdzenia odnoszą się właśnie do liczb pochodnych.

Twierdzenie 1.

Założenia: 1° $f(x)$ jest funkcją ograniczoną w przedziale (a, b),

2° $f(x_0)$ jest aproksymatywnie nawpółciągłą z góry w pukcie x_0 przedziału (a, b),

3° $f(x_0) = \bigwedge F(x_0)$.

Teza. Górna gęstość zbioru E, określonego nierównością

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

równa się jedności niezależnie od ε.

Dowód. Zgodnie z założeniem 2 i twierdzeniem 4 z § 4, mamy

$$f(x_0) \geqslant L(x_0).$$

Ponieważ zaś $f(x) = \bigwedge F(x_0)$, więc na mocy wniosku 1 z § 5

$$f(x_0) \leqslant L(x_0).$$

A zatem

$$f(x_0) = L(x_0).$$

Z dowodu twierdzenia 3 § z 5 wynika, że z ciągu

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots,$$

odpowiadającego liczbie pochodnej $\wedge F(x_0)$, można wybrać przejście do granicy, dające gęstosć częściową

$$\delta_{x_0}(E_i) = 1.$$

Ponieważ

$$\delta_{x_0}(E_i) \leq \overline{d}_{x_0}(E_i) \leq 1,$$

więc

$$\overline{d}_{x_0}(E_i) = 1.$$

Podobny wniosek otrzymujemy, zakładając, że $f(x)$ jest nawpółciągłą aproksymatywnie z dołu.

Określenie. Funkcję $f(x)$ nazywać *quasi - aproksymatywnie ciągłą*, jeśli górna gęstość zbioru określonego nierównością

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

równa się jedności, niezależnie od wartości dodatniej ε.

Wniosek 1. Liczba pochodna ograniczona i nawpółciągła aproksymatywnie w przedziale (a, b) jest quasi - aproksymatywnie ciągłą w tym przedziale.

Istnieje twierdzenie analogiczne do twierdzenia Denjoy.

Twierdzenie 2. Funkcja ograniczona w przedziale (a, b) jest równa liczbie pochodnej swej całki w każdym punkcie, w którym jest quasi - aproksymatywnie ciągłą.

Dowód. Niech E będzie zbiorem punktów, w których

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jeśli weźmiemy przejście do granicy, które daje górną gęstość

$$\overline{d}_{x_0}(E) = 1,$$

możemy, na mocy twierdzenia 1 z § 3, wybrać część, na której istnieją równoczesne gęstości częściowe zbiorów E_i oraz liczba pochodna $\wedge F(x_0)$, przyczem

$$0 \leq \wedge F(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon,$$

skoro

$$l_{i+1} - l_i \leq \varepsilon.$$

Otóż, rozumując dalej. jak w dowodzie twierdzenia 2 z § 5, dochodzimy do równości

$$\wedge F(x_0) = f(x_0).$$

Twierdzenie 3. Funkcja ograniczona i aproksymatywnie nawpółciągła w przedziale (a, b) jest skrajną pochodną w każdym punkcie, w którym jest quasi - aproksymatywnie ciągłą.

Mianowicie funkcja ta jest górną lub dolną pochodną z jednej przynajmniej strony zależnie od tego czy jest aproksymatywnie nawpółciągłą z góry czy z dołu.

Dowód. Na mocy tw. 4 z § 4,

$$f(x_0) \geqslant L(x_0),$$

gdy x_0 jest punktem przedziału (a, b).

Ponieważ liczba pochodna całki nie może być większą od $L(x_0)$, więc tembardziej nie będzie większą od $f(x_0)$. Lecz $f(x_0)$ równa się liezbie pochodnej na zasadzie twierdzenia 2. zatem jest to największa liczba pochodna w punkcie zero, czyli górna pochodna. Twierdzenie to z łatwością daje się zastosować do pochodnych Diniego.

Wniosek 2. Funkcja ograniczona i nawpółciągła aproksymatywnie w przedziale (a, b) jest jedną z czterech funkcji pochodnych Diniego, o ile jest quasi-aproksymatywnie ciągłą stale z jednej strony.

Zestawiając twierdzenia 1 i 3, otrzymujemy

Wniosek 3. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja aproksymatywnie nawpółciągła górnie (dolnie) była górną (dolną) pochodną, jest quasi - aproksymatywna ciągłość.

Wniosek 4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja nawpółciągła była skrajną pochodną, jest quasi - aproksymatywna ciągłość, przyczem nawpółciągłości górnej (dolnej) odpowiada górna (dolna) pochodna.

Ostatnie twierdzenie pozwala na podanie ogólnej własności pochodnych skrajnych ograniczonych.

Twierdzenie 4. Zbiór punktów, w których skrajna pochodna ograniczona funkcji ciągłej w przedziale (a, b) jest quasi - aproksymatywnie ciągłą, jest wszędziegęsty na każdym zbiorze doskonałym.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem podanem przez Younga[1]), funkcja pochodna górna $f(x)$ jest granicą nierosnącego ciągu funkcji nawpółciągłych dolnie, skoro tylko funkcja pierwotna jest ciągłą. Niech ciągiem takim będzie

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

gdzie $f_n(x)$ jest kresem górnym ilorazów $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ dla $|h|<\frac{1}{n}$.

Ponieważ funkcja $f_n(x)$, jako nawpółciągła dolnie, jest klasy pierwszej Baire'a, więc zbiór E_n jej punktów ciągłości będzie dopełnieniem zbioru pierwszej kategorji na każdym zbiorze doskonałym P. Niech E będzie częścią wspólną wszystkich zbiorów E_n. Zbiór E nie tylko nie jest pusty, lecz jako dopełnienie zbioru pierwszej kategorji względem P, jest wszędziegęstym na zbiorze P. W każdym punkcie zbioru E wszystkie funkcje $f_n(x)$ są ciągłe a, ponieważ tworzą ciąg nierosnący, więc ich granica jest funkcją nawpółciągłą górnie.

Otóż, na mocy wniosku 4, górna pochodna nawpółciągła górnie jest quasi-aproksymatywnie ciągłą, więc w otoczeniu każdego punktu zbioru doskonałego znajdzie się punkt, w którym $f(x)$ jest quasi-aproksymatywnie ciągłą.

---

[1]) loc. cit.

Wilno, grudzień 1922.